Secoli di probabilità

Marta Lucchini, IIS Bertrand Russell, Milano

Venezia, 15 Aprile 2018

Il 1600, Pascal e gli altri

- Cardano, *Liber de ludo aleae* (1663, postumo)
- Galilei, *Sopra le scoperte dei dadi* (1630)

Il 1600, Pascal e gli altri

- Cardano, *Liber de ludo aleae* (1663, postumo)

- Galilei, *Sopra le scoperte dei dadi* (1630)

- Un carteggio tra il cavaliere De Méré e Pascal, con il consiglio di Fermat:
È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o una coppia di 6 lanciando 24 volte due dadi?

Il 1600, Pascal e gli altri

- Cardano, *Liber de ludo aleae* (1663, postumo)

- Galilei, *Sopra le scoperte dei dadi* (1630)

- Un carteggio tra il cavaliere De Méré e Pascal, con il consiglio di Fermat:

È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o una coppia di 6 lanciando 24 volte due dadi?

$$P(\text{“almeno un 6 in 4 lanci”}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0,5177$$

$$P(\text{“almeno una coppia di 6 in 24 lanci”}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0,4914$$

Il 1600, Pascal e gli altri

Una riflessione di Maurice G. Kendall (1907-1983):
Le origini del calcolo delle probabilità
http://matematica.unibocconi.it/articoli/le-origini-del-calcolo-delle-probabilità

Il 1600, Pascal e gli altri

Una riflessione di Maurice G. Kendall (1907-1983):
Le origini del calcolo delle probabilità
http://matematica.unibocconi.it/articoli/le-origini-del-calcolo-delle-probabilità

"Perché il calcolo della probabilità ci mise tanto tempo ad emergere?"

Il 1600, Pascal e gli altri

Una riflessione di Maurice G. Kendall (1907-1983):
Le origini del calcolo delle probabilità
http://matematica.unibocconi.it/articoli/le-origini-del-calcolo-delle-probabilità

"Perché il calcolo della probabilità ci mise tanto tempo ad emergere?"
"Greci e romani sembrano, nel complesso, aver riguardato il mondo come determinato in parte dal caso. Dei e dee ebbero influenza sul corso degli eventi e, in particolare, potevano interferire col lancio di dadi, ma erano soltanto esseri superiori con poteri sovraumani e non onnipotenti entità che controllavano ogni cosa. [. . .]

Il 1600, Pascal e gli altri

Una riflessione di Maurice G. Kendall (1907-1983):
Le origini del calcolo delle probabilità
http://matematica.unibocconi.it/articoli/le-origini-del-calcolo-delle-probabilità

"Perché il calcolo della probabilità ci mise tanto tempo ad emergere?"
"Greci e romani sembrano, nel complesso, aver riguardato il mondo come determinato in parte dal caso. Dei e dee ebbero influenza sul corso degli eventi e, in particolare, potevano interferire col lancio di dadi, ma erano soltanto esseri superiori con poteri sovraumani e non onnipotenti entità che controllavano ogni cosa. [...]
La situazione venne radicalmente mutata dall'avvento del cristianesimo. Per i primi Padri della Chiesa il dito di Dio era ovunque. Alcune cause erano palesi, altre nascoste ma nulla accadeva senza causa. In tal senso nulla era casuale e non v'era posto per il caso."

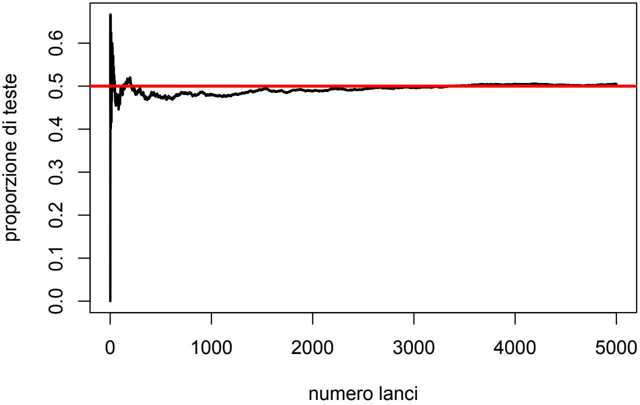
Il 1700 e una legge molto fraintesa

- Jacob Bernoulli, *Ars Conjectandi* (1713, postumo)

Il 1700 e una legge molto fraintesa

- Jacob Bernoulli, *Ars Conjectandi* (1713, postumo)

Legge dei grandi numeri: la frequenza di un evento E in una serie di ripetizioni dello stesso esperimento tende alla probabilità di E.



Il 1700 e una legge molto fraintesa

È corretto affermare che

- al crescere del numero di lanci di una moneta, il numero di teste tende al numero di croci?

Il 1700 e una legge molto fraintesa

È corretto affermare che

- al crescere del numero di lanci di una moneta, il numero di teste tende al numero di croci?

n	#Teste − #Croci
100	−4
1000	−42
2500	−38
5000	50

Il 1700 e una legge molto fraintesa

È corretto affermare che

• al crescere del numero di lanci di una moneta, il numero di teste tende al numero di croci?

n	#Teste − #Croci
100	−4
1000	−42
2500	−38
5000	50

• se si è verificato un gran numero di teste, ci dobbiamo aspettare un recupero delle croci?

Il 1700 e una legge molto fraintesa

È corretto affermare che

• al crescere del numero di lanci di una moneta, il numero di teste tende al numero di croci?

n	#Teste − #Croci
100	-4
1000	-42
2500	-38
5000	50

• se si è verificato un gran numero di teste, ci dobbiamo aspettare un recupero delle croci?
Se le prime 100 sono state teste e da quel momento in poi si alternano testa e croce, la proporzione di teste è

$$\frac{100+n}{100+2n} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Il 1700 e una legge per non fraintendere

- Bayes, *An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances* (1763, postumo)

Il 1700 e una legge per non fraintendere

- Bayes, *An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances* (1763, postumo)

In una notte a Londra, l'80% dei pedoni vittime di incidenti stradali indossava abiti scuri, mentre il restante 20% indossava abiti chiari.

Il 1700 e una legge per non fraintendere

- Bayes, *An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances* (1763, postumo)

In una notte a Londra, l'80% dei pedoni vittime di incidenti stradali indossava abiti scuri, mentre il restante 20% indossava abiti chiari.

$$P(S|I) = 0,8$$

Il 1700 e una legge per non fraintendere

• Bayes, *An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances* (1763, postumo)

In una notte a Londra, l'80% dei pedoni vittime di incidenti stradali indossava abiti scuri, mentre il restante 20% indossava abiti chiari.

$$P(S|I) = 0,8$$

Cosa possiamo dire di $P(I|S)$?

Il 1700 e una legge per non fraintendere

- Bayes, *An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances* (1763, postumo)

In una notte a Londra, l'80% dei pedoni vittime di incidenti stradali indossava abiti scuri, mentre il restante 20% indossava abiti chiari.

$$P(S|I) = 0,8$$

Cosa possiamo dire di $P(I|S)$?

$$\text{Teorema di Bayes:} \quad P(I|S) = \frac{P(S|I)P(I)}{P(S)}$$

Il 1700 e una legge per non fraintendere

• Bayes, *An Essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances* (1763, postumo)

In una notte a Londra, l'80% dei pedoni vittime di incidenti stradali indossava abiti scuri, mentre il restante 20% indossava abiti chiari.

$$P(S|I) = 0,8$$

Cosa possiamo dire di $P(I|S)$?

$$\text{Teorema di Bayes:} \quad P(I|S) = \frac{P(S|I)P(I)}{P(S)}$$

Supponiamo che la probabilità di avere incidenti notturni a Londra sia del 10% e che il 2% della popolazione si vesta di chiaro. Allora

$$P(I|S) = \frac{0,8 \cdot 0,1}{0,98} \simeq 0,08 \qquad P(I|C) = \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,02} = 1$$

Il 1700 e una legge per non fraintendere

L'incidenza di una malattia xy su una popolazione è dell'1%. Un individuo si sottopone ha un test diagnostico, che individua i malati nel 95% dei casi e i sani nel 97% dei casi. Qual è la probabilità che un soggetto risultato positivo al test, sia effettivamente malato?

Il 1700 e una legge per non fraintendere

L'incidenza di una malattia xy su una popolazione è dell'1%. Un individuo si sottopone ha un test diagnostico, che individua i malati nel 95% dei casi e i sani nel 97% dei casi. Qual è la probabilità che un soggetto risultato positivo al test, sia effettivamente malato?

$$P(M) = 0.01 \qquad P(Pos|M) = 0.95 \qquad P(Pos^c|M^c) = 0.97$$

Il 1700 e una legge per non fraintendere

L'incidenza di una malattia xy su una popolazione è dell'1%. Un individuo si sottopone ha un test diagnostico, che individua i malati nel 95% dei casi e i sani nel 97% dei casi. Qual è la probabilità che un soggetto risultato positivo al test, sia effettivamente malato?

$$P(M) = 0.01 \qquad P(Pos|M) = 0.95 \qquad P(Pos^c|M^c) = 0.97$$

Cosa possiamo dire di $P(M|Pos)$?

Il 1700 e una legge per non fraintendere

L'incidenza di una malattia xy su una popolazione è dell'1%. Un individuo si sottopone ha un test diagnostico, che individua i malati nel 95% dei casi e i sani nel 97% dei casi. Qual è la probabilità che un soggetto risultato positivo al test, sia effettivamente malato?

$$P(M) = 0.01 \qquad P(Pos|M) = 0.95 \qquad P(Pos^c|M^c) = 0.97$$

Cosa possiamo dire di $P(M|Pos)$?

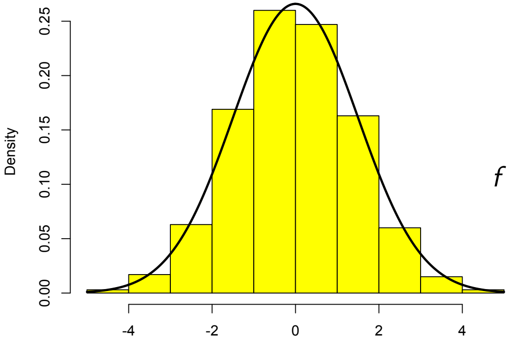
$$P(M|Pos) = \frac{P(Pos|M)P(M)}{P(Pos)} \simeq 0.24$$

Il 1800 e una campana

• Carl F. Gauss (1777-1855), effettuando misurazioni astronomiche, si trova ad affrontare il problema degli errori di misura.

Il 1800 e una campana

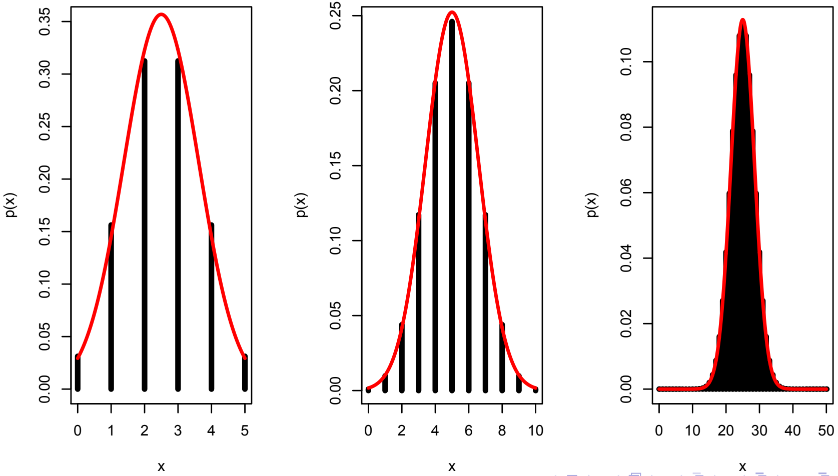
- Carl F. Gauss (1777-1855), effettuando misurazioni astronomiche, si trova ad affrontare il problema degli errori di misura.



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Il 1800 e una campana

Probabilità di ottenere un dato numero di teste in N lanci di una moneta equa, per $N = 5, 10, 50$.

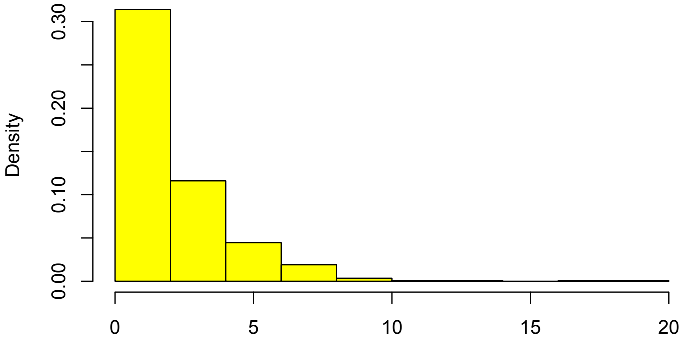


Il 1800 e una campana

Quando una variabile è la somma di tanti contributi, tutti con lo stesso comportamento, la sua distribuzione è, approssimatamente, quella gaussiana.

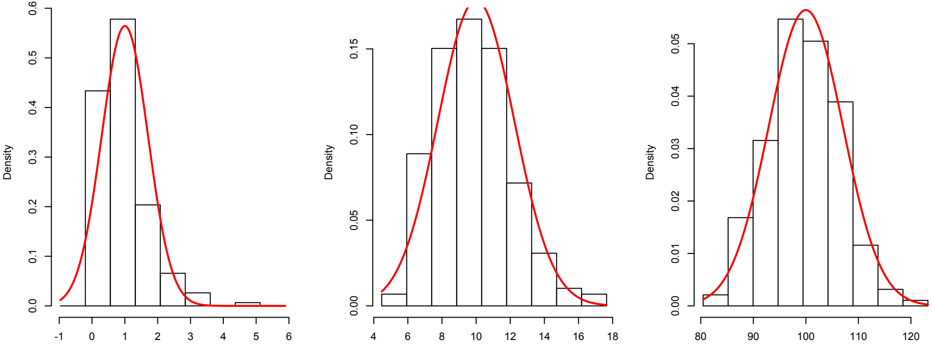
Il 1800 e una campana

Quando una variabile è la somma di tanti contributi, tutti con lo stesso comportamento, la sua distribuzione è, approssimatamente, quella gaussiana.



Il 1800 e una campana

Quando una variabile è la somma di tanti contributi, tutti con lo stesso comportamento, la sua distribuzione è, approssimatamente, quella gaussiana.



Il 1900 e un problema fondamentale

- Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability* (1933)

Il 1900 e un problema fondamentale

- Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability* (1933)

Che cos'è la probabilità?

Il 1900 e un problema fondamentale

• Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability* (1933)

Che cos'è la probabilità?

Se Ω è lo spazio campionario associato a un esperimento e E è un evento, allora

- $P(E) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Se F è incompatibile con E, allora $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

Grazie